



C A P Í T U L O 2

IDEALES MAXIMALES Y PRIMOS EN ANILLOS BOOLEANOS

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.819112630012>

Carlos Alberto Peña Miranda

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

<https://orcid.org/0000-0002-4339-4615>

Rodolfo José Gálvez Pérez

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

<https://orcid.org/0000-0002-6349-7793>

Alex Armando Cruz Hualpara

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

<https://orcid.org/0000-0002-5453-6885>

Humberto Emiliano Gálvez Pérez

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

<https://orcid.org/0000-0003-2827-3564>

RESUMEN: En este trabajo se estudian los ideales maximales y primos en la teoría de anillos, con especial énfasis en los anillos booleanos. Los resultados se desarrollan utilizando el Lema de Zorn como herramienta fundamental, el cual permite establecer la existencia de ideales primos minimales y de ideales maximales, así como su relación estructural. En particular, se analiza la estructura de los anillos booleanos unitarios no triviales, donde los ideales primos coinciden con los ideales maximales. Asimismo, se presentan aplicaciones a la caracterización de ciertos anillos como sumas subdirectas de cuerpos. Los resultados ponen de manifiesto el papel unificador del Lema de Zorn en el estudio de la estructura algebraica de los anillos.

PALABRAS CLAVE: Lema de Zorn, ideales maximales, ideales primos, anillos booleanos, relaciones de orden, anillos semisimples.

IDEALES MAXIMALES AND PRIMOS IN BOOLEAN RINGS

ABSTRACT: In this work, maximal and prime ideals in ring theory are studied, with special emphasis on Boolean rings. The results are developed using Zorn's Lemma as a fundamental tool, which allows for establishing the existence of minimal prime ideals and maximal ideals, as well as their structural relationships. In particular, the structure of nontrivial unital Boolean rings is analyzed, where prime ideals coincide with maximal ideals. Additionally, applications are presented for the characterization of certain rings as subdirect sums of fields. The results highlight the unifying role of Zorn's Lemma in the study of the algebraic structure of rings.

KEYWORDS: Zorn's Lemma, maximal ideals, prime ideals, Boolean rings, order relations, semisimple rings.

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo es analizar la existencia y la estructura de ideales maximales y primos en anillos, con especial énfasis en los anillos booleanos, utilizando el Lema de Zorn como herramienta fundamental. Este lema, equivalente al Axioma de Elección, permite garantizar la existencia de elementos maximales bajo ciertas condiciones de acotación, incluso cuando dichos elementos no pueden construirse de manera explícita, lo que lo convierte en un instrumento esencial en la teoría de anillos.

En particular, se demuestra que la existencia de ideales maximales y primos es clave para describir la estructura interna de un anillo. Además, permite establecer conexiones con cuerpos y anillos semisimples, construir cocientes simples y caracterizar anillos mediante sumas subdirectas. En el caso de los anillos booleanos, se muestra que los ideales primos coinciden con los ideales maximales, y que la estructura parcialmente ordenada de los ideales permite aplicar el Lema de Zorn para garantizar la existencia de dichos ideales.

Los resultados presentados ilustran así la relevancia del Lema de Zorn como herramienta unificadora en el estudio de la estructura algebraica de los anillos y su papel central en la caracterización de anillos semisimples y booleanos.

PRELIMINARES

Enunciaremos algunas definiciones necesarias para el estudio, indicaremos el principio de maximalidad de Hausdorff y el lema de Zorn y, finalmente, desarrollaremos algunas aplicaciones del lema mencionado en la teoría de anillos.

Relación de orden

Consideremos un conjunto A distinto del conjunto vacío y una relación binaria definida sobre él, denotando por $\leq$ dicha relación.

Definición 1. La relación $\leq$ definida sobre el conjunto A es llamada *relación de orden parcial* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva; es decir, se verifican las siguientes propiedades:

Para todo $a \in A$, se cumple $a \leq a$.

Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

El conjunto $(A, \leq)$ será llamado *conjunto parcialmente ordenado* o simplemente *conjunto ordenado* por $\leq$.

Definición 2. Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, un subconjunto no vacío B de A es llamado una *cadena* si $(B, \leq)$ es totalmente ordenado, esto es, para todo par de elementos $x, y \in B$ se cumple que $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

A continuación, se presentan los principios maximales de Hausdorff, los cuales garantizan la existencia de cadenas maximales en conjuntos parcialmente ordenados.

PRINCIPIOS MAXIMALES DE HAUSDORFF

Primer principio maximal de Hausdorff

Todo conjunto ordenado posee al menos una cadena maximal.

Segundo principio maximal de Hausdorff

Toda cadena de un conjunto ordenado está contenida en una cadena maximal.

Lema de Zorn

Si X es un conjunto parcialmente ordenado por la relación $\leq$, tal que toda C de X está acotada superiormente en X , entonces X posee al menos un elemento maximal.

Algunos conceptos de la teoría de anillos

Definición 3. Un conjunto no vacío R es un *anillo* si tiene dos operaciones $+$ y $\cdot$ tales que:

1. $(R, +)$ es un grupo abeliano.

2. $(R, \cdot)$ es un semigrupo.

La operación $\cdot$ es distributiva sobre la operación $+$.

Definición 4. Sea R un anillo. Entonces:

1. Un subconjunto no vacío $I \subseteq R$ es llamado *ideal del anillo* si satisface las condiciones:

a) Para todo $a, b \in I$, se tiene que $a - b \in I$

b) Para todo $a \in I$ y todo $r \in R$, se cumple que $ra, ar \in I$.

2. Un ideal $I \subseteq R$ es *propio* si $I \subset R$ y $I \neq R$.

3. Un ideal $M \subseteq R$ es llamado *maximal* si:

a) $M \neq R$.

b) Si $J \subseteq R$ es cualquier ideal tal que $M \subseteq J \subseteq R$, entonces $M=J$ o bien $J=R$.

4. Un ideal $P \subseteq R$ es llamado *ideal primo* si

$$\forall a, b \in R : a \cdot b \in P \Rightarrow a \in P \text{ o } b \in P$$

Si I y P son ideales del anillo R , donde P es ideal primo, entonces P es llamado *ideal primo minimal de I* si:

a) $I \subseteq P$

b) No existe ideal primo P^* tal que $I \subseteq P^* \subset P$.

Definición 5. Sea R un anillo. Entonces:

1. Un ideal $I \subseteq R$ es llamado *modular* (o *regular*) si existe un elemento $e \in R$ tal que

$$ae - a \in I, \text{ para cada } a \in R$$

2. El elemento e es llamado *identidad módulo I* o *identidad para R con respecto al ideal I* .

3. Un ideal modular primo es un ideal primo que también es modular.

4. Un ideal modular maximal es un ideal maximal que también es modular.

Definición 6. Un anillo R es llamado *semisimple* si la intersección de todos los ideales maximales M es el ideal cero.

Teorema 1. Un anillo R es isomorfo a una suma subdirecta de cuerpos si y solo si el anillo R es semisimple.

Demostración. Véase Burton (1970).

Definición 7. Un anillo R es llamado *anillo booleano* si $a^2=a$, para todo $a \in R$

Lema 1. Un anillo booleano es conmutativo.

Demostración. Véase Herstein (1986).

Lema 2. Sea R un anillo booleano. La relación $\leq$ definida por

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = a$$

verifica las siguientes propiedades:

1. $a \leq a$, para todo $a \in R$
2. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
3. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces, $a = b$.

Prueba. La verificación es inmediata.

Lema 3. Sea R un anillo booleano y $a \in R$. Entonces el conjunto

$$I_a = \{ r \in R : r \leq a \}$$

es un ideal del anillo R .

Demostración. Como $a \leq a$, se tiene $a \in I_a$, luego $I_a \neq \emptyset$.

Sean $x, z \in I_a$. Entonces $x \leq a$ y $z \leq a$. Por la definición de $\leq$ en el lema 2 tiene se tiene

$$xa = x, \quad za = z.$$

Por lo tanto,

$$x - z = xa - za = (x - z)a,$$

lo que implica que $x - a \leq a$. En consecuencia, $x - z \in I_a$.

Ahora, sea $x \in I_a$ y $r \in R$. Como $x \leq a$, se tiene $xa = x$. Al multiplicar por r , se obtiene

$$(xr)a = r(xa) = rx$$

Luego $rx \leq a$, y por tanto $xr \in I_a$. Dado que R es conmutativo, también $rx \in I_a$. Por lo tanto, es un ideal del anillo R .

Teorema 2. Sea R un anillo booleano, unitario no trivial.

I es primo si y sólo si es ideal maximal.

Prueba. Véase Burton (1970) y Hungerford (1980).

Teorema 3. Sea I un ideal propio de un anillo booleano R . Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

1. I es un ideal maximal.
2. I es un ideal primo.
3. Para cada elemento $a \in R$ se tiene que a o bien $1 - a$ es elemento de I (pero no ambos).

Demostración. Ver Burton (1970).

RESULTADOS PRINCIPALES

En esta sección se presentan los principales resultados obtenidos mediante la aplicación del Lema de Zorn a la teoría de anillos, destacándose la existencia de ideales primos minimales, la inclusión de ideales primos modulares en ideales maximales modulares, la caracterización de los anillos semisimples como sumas subdirectas de cuerpos y la descripción de la estructura de los anillos booleanos.

Teorema 4. Sean I y P ideales del anillo R , con P primo. Si $I \subseteq P$, entonces P contiene un ideal primo minimal del ideal I .

Demostración. Consideremos la familia de ideales primos del anillo R que contienen al ideal I y que están contenidos en P , es decir

$$F = \{Q : Q \text{ es ideal primo de } R \text{ y } I \subseteq Q \subseteq P\}$$

Como $I \subseteq P$ y P es un ideal primo de R , se tiene que $P \in F$, es decir, $F \neq \emptyset$.

Definamos una relación de orden parcial $\leq$ sobre la familia F mediante inclusión inversa de la siguiente manera:

$$(\forall (Q, S) \in F \times F)(Q \leq S \Leftrightarrow S \subseteq Q) \quad (1)$$

La relación definida en (1) verifica lo siguiente:

- Para todo $Q \in F$, se tiene $Q \subseteq Q$, lo que implica $Q \leq Q$. Es decir, la relación $\leq$ es reflexiva sobre F .
- Dados $Q, S \in F$ tales que $Q \leq S$ y $S \leq Q$, se cumple que $S \subseteq Q$ y $Q \subseteq S$, de donde se deduce que $Q = S$. Esto muestra que la relación $\leq$ es antisimétrica sobre F .
- Dados $Q, S, T \in F$ tales que $Q \leq S$ y $S \leq T$, se tiene que $S \subseteq Q$ y $T \subseteq S$, de donde resulta $T \subseteq Q$, es decir $Q \leq T$. Esto verifica que la relación $\leq$ es transitiva sobre F .

Por lo tanto, $(F, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ahora, sea C una cadena arbitraria de la familia F , es decir, C es una subfamilia de F totalmente ordenada respecto a la relación $\leq$ definida en (1). Sea

$$\bar{P} := \bigcap_{Q \in C} Q$$

Notemos que:

- Para todo $Q \in C$, se tiene $Q \in F$, luego Q es un ideal primo. Por lo tanto, $\bar{P}$ es un ideal de R .
- Además, como $I \subseteq Q$ para todo $Q \in C$, se sigue que

$$I \subseteq \bigcap_{Q \in C} Q = \bar{P}$$

También se cumple que

$$\bar{P} = \bigcap_{Q \in C} Q \subseteq Q \subseteq P$$

para todo $Q \in C$. Luego $I \subseteq \bar{P} \subseteq P$, por lo que $\bar{P} \in F$.

Como $\bar{P} \subseteq Q$ para todo $Q \in C$, se tiene $Q \leq \bar{P}$ para todo $Q \in C$. Por lo tanto, $\bar{P}$ es una cota superior de la cadena C respecto a la relación definida en (1). Así, la cadena C es acotada superiormente.

Aplicando el Lema de Zorn, la familia $(F, \leq)$ posee un elemento maximal, digamos P^* . Esto significa que si $Q \in F$ y $P^* \leq Q$, entonces $P^* = Q$.

Supongamos que P_1 es cualquier ideal primo de R tal que

$$I \subseteq P_1 \subseteq P$$

Como $P^* \subseteq P$ ya que $P^* \in F$ entonces $P_1 \in F$ y como $P_1 \subseteq P^*$ entonces $P^* \leq P_1$, lo que contradice la maximalidad de P^* .

Por lo tanto, se tiene $I \subseteq P^*$ y no existe ideal primo P_1 de R tal que $I \subseteq P_1 \subseteq P^*$. Esto demuestra que P contiene un ideal primo minimal de I .

Teorema 5. Cada ideal modular primo del anillo R está contenido en un ideal maximal modular del anillo R .

Demostración. Sea I un ideal del anillo R tal que:

1. $I \neq R$ (ideal propio),
2. I es un ideal modular.

Sea e el elemento identidad módulo I . Consideremos la familia de ideales propios del anillo R que contienen al ideal I , es decir, la colección

$$F = \{J \subseteq R : J \text{ ideal de } R, \quad J \neq R \text{ y } I \subseteq J\}$$

Como $I \subseteq R$ con $I \neq R$ y $I \subseteq I$, entonces $I \in F$, lo que nos indica que la familia F no es vacía.

Si suponemos que existe $J \in F$ tal que $e \in J$, entonces $a \in J$ para todo $a \in R$, por definición de ideal.

Como I es un ideal modular, se tiene que $ae - e \in I \subseteq J$, de donde $ae - e \in J$ para todo $a \in R$.

Ahora, para todo elemento $a \in R$ se tiene que $a = ae - (ae - a) \in J$, pues J es un ideal. Por lo tanto, $R \subseteq J$ y como $J \subseteq R$, se sigue que $J = R$, lo cual es una contradicción ya que $J \neq R$.

Por lo tanto, resulta que

$$e \notin J \quad \text{para todo } J \in F \quad (2)$$

Ahora consideremos en la familia F la relación de orden dada por inclusión, es decir,

$$(\forall (J', J'') \in F \times F) (J' \leq J'' \Leftrightarrow J' \subseteq J'') \quad (3)$$

Por la Proposición 1 (Gálvez Pérez et al., 2026, p. 4), $(F, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea ahora C una cadena arbitraria de la familia F , es decir, C es una subfamilia de F totalmente ordenada respecto a la relación $\leq$ definida en (3). Sea

$$P = \bigcup_{J \in C} J$$

Como C es una cadena, P es un ideal del anillo R . Además, para todo $J \in C$ se tiene

$$I \subseteq J \subseteq \bigcup_{J \in C} J = P$$

luego $I \subseteq P$.

Por (2) sabemos que para todo $e \notin J$, entonces $e \notin P$. De hecho, si $e \in P$, entonces existe $J_e \in C \subset F$ tal que $e \in J_e$, lo que contradice la condición (2).

Luego, P es un ideal propio de R , es decir, $P \subset R$ y $P \neq R$.

Así se tiene que P es ideal propio del anillo R y $I \subseteq P$, entonces $P \in F$.

Por otra parte, para todo $J \in C$ se tiene $J \subseteq P$, es decir, $J \leq P$, lo que nos indica que P es una cota superior de la cadena C respecto a la relación dada en (3).

Por el Lema de Zorn, la familia $(F, \leq)$ posee un elemento maximal, digamos M .

Como $M \in F$, entonces $M \neq R$ y $I \subseteq M$, y debido a que $a \in I \subseteq M$ para todo $a \in R$, se sigue que M es un ideal modular.

Además, si $J \in F$ y $M \subseteq J \subset R$, entonces por maximalidad de M necesariamente $M=J$. Por tanto, M es un ideal maximal modular que contiene al ideal I .

Teorema 6. Sea R un anillo. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

1. El anillo R es isomorfo a una suma subdirecta de cuerpos.
2. Para cada ideal $I \neq \{0\}$, existe un ideal $J \neq R$ tal que $I+J=R$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $I \neq \{0\}$ un ideal del anillo R . Como R es isomorfo a una suma subdirecta de cuerpos, existe una familia de ideales maximales $\{M_k : k \in K\}$ del anillo R tal que

$$\bigcap_{k \in K} M_k = \{0\}$$

Dado que $I \neq \{0\}$, no puede suceder que $I \subseteq M_k$ para todo $k \in K$, pues en ese caso tendríamos

$$I \subseteq \bigcap_{k \in K} M_k = \{0\},$$

lo cual implicaría $I = \{0\}$, una contradicción. Por lo tanto, existe algún $k \in K$ tal que $I \not\subseteq M_k$

Además, como M_k es un ideal maximal y $I \not\subseteq M_k$, se tiene

$$I + M_k = R.$$

Considerando $J = M_k$, se concluye que existe un ideal $J \neq R$ tal que $I + J = R$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $a \in R$, $a \neq 0$. Entonces el ideal principal $\langle a \rangle \neq \{0\}$. Podemos asumir que $\langle a \rangle \neq R$ (sin pérdida de generalidad). Por hipótesis, existe un ideal $J \neq R$, tal que

$$\langle a \rangle + J = R$$

Consideraremos la familia de ideales maximales del anillo R que contienen al ideal J y a no es elemento de dichos ideales, es decir,

$$F = \{M : M \text{ es ideal maximal de } R, J \subseteq M, a \notin M\}$$

Supongamos que $F \neq \emptyset$. Definimos una relación $\leq$ en F del modo siguiente:

$$(\forall (M_1, M_2) \in F \times F) (M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2) \quad (4)$$

Por la Proposición 1 (Gálvez Pérez et al., 2026, p.4), $(F, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $C \subseteq F$ una cadena arbitraria, es decir, un subconjunto totalmente ordenado por la relación $\leq$ definida en (4).

Consideremos la unión de los elementos de la cadena C , denotada por

$$M = \bigcup_{N \in C} N$$

Ahora debemos verificar lo siguiente:

a) M es una cota superior de la cadena C.

En efecto, para todo $N \in C$ se tiene que

$$N \subseteq \bigcup_{N \in C} N = M$$

Luego, $N \leq M$ para todo $N \in C$. Por lo tanto, M es una cota superior de la cadena C respecto a la relación $\leq$ definida en (5).

b) M es elemento de la familia F, es decir:

i) $J \subseteq M$.

En efecto, para todo $N \in C$ se tiene

$$J \subseteq N \subseteq \bigcup_{N \in C} N = M$$

ii) $a \notin M$.

En efecto, si $a \in M$, entonces existe $N \in C$ tal que $a \in N$, lo cual es un absurdo, pues $N \in F$. Por tanto, $a \notin M$.

iii) M es un ideal maximal del anillo R.

En efecto, Sean $x, z \in M$. Entonces existen $N_x, N_z \in C$ tales que $x \in N_x$ y $z \in N_z$. Como C es una cadena, $N_x \leq N_z$ o $N_z \leq N_x$. Por lo tanto, $x, z \in N_x$ o $x, z \in N_z$, es decir, $x, z \in N$ para algún $N \in C$ y como N es ideal, entonces

$$x - z \in N \subseteq \bigcup_{N \in C} N = M$$

Además, para todo $r \in R$, si $x \in M$, entonces $x \in N$ para algún $N \in C$, y como I es ideal, luego

$$rx, zr \in N \subseteq \bigcup_{N \in \mathcal{C}} N = M$$

Por lo tanto, M es un ideal.

Verificamos la maximalidad de M :

Sea K es un ideal tal que $M \subset K \subseteq R$. Como $a \notin M$ y $M \subset K$, tenemos que $a \in K$. Por lo tanto, $\langle a \rangle \subseteq K$ y se cumple

$$R = \langle a \rangle + J \subseteq \langle a \rangle + K \subseteq K$$

De esto se sigue que $K = R$. Por lo tanto, M es un ideal maximal del anillo R .

Por el lema de Zorn, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}, \leq)$ posee un elemento maximal, denotémoslo por M^* . Entonces:

$$J \subseteq M^* \subseteq M^* + \langle a \rangle$$

siendo $M^* + \langle a \rangle$ ideal del anillo R .

Sea K^* es un ideal cualquiera de R tal que

$$M^* + \langle a \rangle \subseteq K^* \subseteq R$$

Debido a las condiciones de M^* , se tiene $a \in K^*$. Luego:

$$R = \langle a \rangle + J \subseteq \langle a \rangle + K^* \subseteq K^*.$$

Entonces, $K^* = R$ esto implica que $M^* + \langle a \rangle$ es maximal. Por lo tanto, $M^* + \langle a \rangle \in \mathcal{F}$ y $M^* \leq M^* + \langle a \rangle$. Pero por maximalidad de M^* , esto implicaría:

$$M^* = M^* + \langle a \rangle.$$

Lo cual es imposible porque $a \notin M^*$ obteniéndose una contradicción.

Por lo tanto, $\mathcal{F} = \emptyset$. Luego, resulta que

$$\bigcap \{M : M \in \mathcal{F}\} = \{0\}.$$

Esto demuestra que el anillo R es semisimple. Por el Teorema 1, R es isomorfo a una suma subdirecta de campos.

Teorema 7. Sea R un anillo booleano. Entonces, para cualquier elemento $a \in R$ con $a \neq 0$, existe un ideal maximal M del anillo R tal que $a \notin M$.

Demostración. Sea $a \in R$, $a \neq 0$. Consideremos el conjunto

$$F_a = \{M : M \text{ es ideal maximal de } R \text{ y } a \notin M\}$$

Tomando $0 \neq a \neq 1$, definimos el conjunto

$$I_{1-a} = \{r \in R : r \leq 1-a\}.$$

Por el Lema 3, este conjunto es un ideal del anillo.

Observemos lo siguiente:

1. $1-a \in I_{1-a}$ ya que $1-a \leq 1-a$.
2. $a \notin I_{1-a}$. En efecto, si $a \in I_{1-a}$, entonces $a \leq 1-a$. Pero en un anillo booleano se cumple $a(1-a) = 0$ y como $a = a^2$ resulta $a-a = 0$, es decir, $0 = a$, lo cual contradice la hipótesis $a \neq 0$. Por lo tanto, $a \notin I_{1-a}$.

Así, por Teorema 3, I_{1-a} es ideal maximal. Por tanto, $F_a \neq \emptyset$.

Dotamos al conjunto F_a de una relación de orden parcial $\leq$ definiendo:

$$(\forall (M_1, M_2) \in F_a \times F_a) (M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2)$$

Por la Proposición 1 (Gálvez Pérez et al., 2026, p. 4), $(F_a, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Consideremos una cadena arbitraria C_a de la familia F_a , es decir, una subfamilia de F_a totalmente ordenada respecto a la relación definida en (5). Sea

$$N = \bigcup_{J \in C_a} J$$

Demostraremos que:

1. N es una cota superior para $(C_a, \leq)$.
2. $N \in F_a$, es decir:
 - a) N es un ideal maximal del anillo R .
 - b) $a \notin N$.

Verificación del ítem 1)

Para todo $J \in C_a$ se tiene que

$$J \subseteq \bigcup_{J \in C_a} J = N$$

Por lo que $J \leq N$ para todo $J \in C_a$. Por tanto, N es una cota superior de la cadena C_a respecto a la relación $\leq$ dada en (5).

Verificación del ítem 2)

Sean $x, z \in N$ y $r \in R$. Entonces existen $J', J'' \in C_a$ tales que $x \in J'$ y $z \in J''$. Como C_a es una cadena, se tiene que $J' \leq J''$ o $J'' \leq J'$, luego $x, z \in J'$ o $x, z \in J''$. Por lo tanto, existe $J \in C_a$ tal que $x, z \in J$ y como J es ideal se tiene $x - z \in J$ y $r x \in J$. Por tanto:

$$x - z \in J \subseteq \bigcup_{J \in C_a} J = N$$

y $r x \in J \subseteq N$, es decir, N es un ideal del anillo R .

Además, si $a \in N$, entonces existe $J \in C_a$ tal que $a \in J$ lo cual es imposible porque $J \in F_a$. Por tanto, $a \notin N$, lo cual nos garantiza la parte b) del ítem 2).

Sea K un ideal cualquiera del anillo R tal que $N \subset K \subseteq R$. Debemos demostrar que $K = R$. como $N \subset K$ y $a \notin N$, tenemos $a \notin J$ para todo $J \in C_a$.

Por Teorema 3, se tiene

$$1 - a \in J \subseteq \bigcup_{J \in C_a} J = N$$

Como K es un ideal con $N \subset K$, se sigue que $1 - a \in K$, entonces

$$1 = a + (1 - a) \in K$$

por lo tanto, $K = R$. Esto demuestra que N es maximal, es decir, $N \in F_a$ quedando demostrada la parte a) del ítem 2).

Por Lema de Zorn, existe un elemento maximal M en $(F_a, \leq)$. Es decir, existe un ideal maximal $M \subseteq R$ tal que $a \notin M$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado la existencia y estructura de ideales maximales y primos en anillos, utilizando el Lema de Zorn como herramienta fundamental. Este lema, equivalente al Axioma de Elección, permite garantizar la existencia de elementos maximales bajo ciertas condiciones de acotación, aun cuando no puedan construirse de manera explícita.

Se demostraron resultados relevantes, incluyendo la existencia de ideales primos minimales contenidos en un ideal dentro de un ideal primo, la existencia de ideales modulares maximales, y la caracterización de anillos como sumas subdirectas de cuerpos.

Asimismo, se aplicó el Lema de Zorn a anillos booleanos, mostrando que para cualquier elemento no nulo existe un ideal maximal que lo excluye, y que en este contexto los ideales primos coinciden con los maximales. Esto permite interpretar los anillos booleanos como semisimples.

Estos resultados ponen de relieve la centralidad del Lema de Zorn en la teoría de anillos y su utilidad para el estudio de la estructura algebraica. Además, sugieren que estas técnicas pueden aplicarse en contextos más generales, incluyendo otros tipos de anillos, conmutativos o no, y al estudio del espectro primo desde un enfoque más amplio.

REFERENCIA

- Burton, D. M. (1970). *A first course in rings and ideals*. Addison-Wesley.
- Dugundji, J. (1972). *Topology*. Allyn and Bacon.
- Gálvez Pérez, R. J., Peña Miranda, C. A., & Cruz Hualpara, A. A. (2025). Aplicaciones del lema de Zorn en la existencia de ideales maximales y primos en anillos. En *Modelagem, abstração e raciocínio na construção matemática* (pp. 12–24). Atena Editora.
- Goodearl, K. R., & Warfield Jr., R. B. (2004). *An introduction to noncommutative Noetherian rings*. Cambridge University Press.
- Herstein, I. N. (1986). *Álgebra abstracta*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hungerford, T. W. (1980). *Algebra*. Springer.
- Lanski, C. (2005). *Concepts in abstract algebra*. Thomson Brooks/Cole.
- Muñoz Q., J. M. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.
- Rowen, L. H. (1988). *Ring theory*. Academic Press.